ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДАВЛЕНИИ НА УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ ЖЕСТКОГО ШТАМПА С НЕСПРЯМЛЯЕМОЙ ГРАНИЦЕЙ [1]

П.В. Лапухов П.В.

Рассмотрим задачу о жестком штампе, действующем на упругую полуплоскость $y < 0$ (см. [1]).

Пусть контур штампа, вдавленного в полуплоскость, определяется уравнением $y = f(x)$ при $x \leq |a|$. Предположим, что участки границы $x > |a|$ свободны от напряжений, и штамп вдавлен силами, нормальными к его границе. Требуется определить поля напряжений в полуплоскости.

Пусть $\varphi(z), \psi(z)$ функции Гурса и пусть $\varphi'(z) = p(x,y) + iq(x,y)$. Функция $\psi(z)$ определена равенством

$$z\varphi'(z) + \psi(z) = \varphi(z). \tag{1}$$

Функция p(x,y) удовлетворяет сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)d\xi}{\xi - t} = \frac{2\mu}{\chi + 1}f'(t), \tag{2}$$

где μ, χ - упругие постоянные полуплоскости $y < 0$ и t - любая точка отрезка $(-a, a)$ (считаем, что $p(t) = 0$ при $t \notin (-a, a)$).

Решение уравнения (2) имеет вид

$$p(t) = p_0(t) + \frac{A}{\sqrt{a^2 - t^2}}, \tag{3}$$

где

$$p_0(t) = \frac{2\mu}{\pi(\chi + 1)\sqrt{a^2 - t^2}}\int_{-a}^{a}\frac{f'(\xi)\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - t}d\xi. \tag{4}$$

Постоянную A можно определить, если известен главный вектор P усилий приложенных к штампу:

$$A = \frac{P}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}p_0(t)dt. \tag{5}$$

[1]Работа выполнена при поддержке фонда НИОКР РТ (грант 05-5.1-16.2002 (Ф))

Тогда

$$\varphi'(z) = -\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(\xi,0)}{\xi - z}d\xi. \qquad (6)$$

Рассмотрим случай, когда $f(x)$ представляет собой функцию Вейерштрасса, то есть задается в виде суммы ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(k_n)\cos(k_n x + \varphi_n), \qquad (7)$$

где φ_n - последовательность вещественных чисел, и $a(k_n) \sim k_n^{-\alpha}$, $k_n \sim n$, $n \to \infty$, $\alpha > 0$. Будем называть α порядком функции Вейерштрасса.

Функция была предложена К. Вейерштрассом в качестве примера функции, не имеющей производной. Если $\alpha = D - 2$, $1 < D < 2$, то размерность Хаусдорфа-Безиковича графика $f(x)$ равна D. Поскольку функция не имеет производной, правая часть уравнения (2) лишена смысла. Однако можно, выбрав полную ортонормированную в $L^2[-a,a]$ систему функций $s_m(t)$, $t \in [-a,a]$, получить следующее представление:

$$F(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)d\xi}{\xi - t} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m s_m(t), \qquad (8)$$

где

$$b_m = \int_{-a}^{a} s_m(t)df(t). \qquad (9)$$

Интеграл в правой части (9) следует понимать как интеграл Римана-Стильтьеса так, как это сделано в [2]. Графики функций Вейерштрасса Γ_α удовлетворяют условию Ф-спрямляемости с индексом спрямляемости $\Gamma_\alpha < 2$, поэтому интегрирование является допустимой операцией. В силу того, что интегральный оператор, предложенный в [2], не ограничен в обычной операторной норме, нельзя утверждать, что ряд (8) сходится.

Рассмотрим следующую численную модель. В качестве полной системы ортонормированных функций $s_m(t)$ выберем систему функций Шаудера, которые на отрезке $[0,1]$ определяются следующим образом: $s_0(x) = 0, s_1(x) = x$ и

$$s_{2^n+k} = \begin{cases} 2^n(x - \dfrac{2k-2}{2^{n+1}}) & \text{для } \frac{2k-2}{2^{n+1}} < x < \frac{2k-1}{2^{n+1}} \\ 2^n(\dfrac{2k}{2^{n+1}} - x) & \text{для } \frac{2k-1}{2^{n+1}} < x < \frac{2k}{2^{n+1}} \\ 0 & \text{для всех остальных } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Аппроксимацию интеграла Римана-Стильтьеса проведем по следующей схеме. Выберем разбиение $\tau = \{t_j\}_{j=0}^{j=n}$ интервала $[-a, a]$, такое что $diam(\tau) = max\{|t_j - t_{j-1}| \; : \; j = 1, 2, \dots n\} < \epsilon$, где ϵ достаточно мало. Кроме этого, пусть множество $\{w_j\}_{j=1}^{j=n}$ таково, что $t_{j-1} \le w_j \le t_j$ $j = 1, 2, \dots n$. Тогда интеграл аппроксимируем по формуле

$$\int_{-a}^{a} f(t) dg(t) \approx \sum_{j=1}^{n} f(w_j)(g(t_j) - g(t_{j-1})), \tag{10}$$

здесь мы считаем что $f(t)$, $g(t)$ - непрерывные функции.

Расчеты, проведенные в рамках предложенной модели, показывают, что ряд (7) расходится. Поэтому следующим шагом может стать "ослабление" правой части (2), например, замена обычной производной на дробную. Для функции $f(x)$, представленной тригонометрическим рядом вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k exp(a_k x), \tag{11}$$

где c_k, a_k - вещественные числа, дробная производная порядка $0 < p < 1$ равна

$$D^p f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^p exp(a_k x). \tag{12}$$

Для функции Вейерштрасса (7), где $\alpha = D - 2$, $1 < D < 2$, имеют смысл дробные производные порядка $p < 2 - D$. Таким образом, если $f(t)$ – функция Вейерштрасса порядка $\alpha = D - 2$, $1 < D < 2$, то новая задача запишется в виде уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{p(\xi) d\xi}{\xi - t} = \frac{2\mu}{\chi + 1} D^p f(t), \;\; p < 2 - D. \tag{13}$$

Очевидно, что дробная производная порядка p функции Вейерштрасса $f(t)$ порядка α, есть функция Вейерштрасса порядка $\alpha+p$. Кроме того, функция Вейерштрасса $f(t)$ порядка α является гельдеровой функцией того же порядка, т.е $f(t) \in H_\alpha([-a,a])$. По определению

$$f(t) \in H_\nu([a,b]) \Leftrightarrow$$
$$sup\left\{\frac{|f(t')-f(t'')|}{|t'-t''|^\nu} : t',t'' \in [a,b], t' \neq t''\right\} < \infty.$$

В силу этого свойства сингулярный интеграл в (4) имеет смысл. Для численного моделирования удобно представлять сингулярные интегралы в форме

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(\xi)}{\xi - t} = \int_{-a}^{a} \frac{f(\xi)-f(t)}{\xi - t} + \int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{\xi - t} =$$
$$= \int_{-a}^{a} \frac{f(\xi)-f(t)}{\xi - t} + f(t)\ln\left(\frac{a-t}{t+a}\right). \tag{14}$$

При расчетах особую точку можно изолировать и аппроксимировать интегралы стандартными методами. Численное решение получается эмпирически устойчивым. Это дает основания сделать заключение о возможости применения уравнения (13) для моделирования реальных задач при значениях D близких к 1.

Литература

[1] Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я. *Интегральные уравнения* // М.: Наука, 1968.

[2] Kats B.A. *The Cauchy integral along Φ-rectifiable curves* // Lobachevskii Journal of Mathematics - 2000. - Vol 7. - P.15–29.